1.10 La méthode de la phase stationnaire (218, 224, 235, 236, 239) [8]

Dans certaines équations aux dérivées partielles (ondes, Schrödinger notamment), on peut être intéressé de regarder le comportement de la solution quand on injecte en condition initiale une fonction *fortement oscillante*, c'est-à-dire du type $f(x)e^{i\frac{\lambda x}{\varepsilon}}$ avec $\varepsilon > 0$ très petit et f une fonction régulière et à support compact disons. La phase λx est choisie ainsi car il s'agit du comportement "classique" d'une onde plane. On cherche donc à obtenir un développement asymptotique de la solution quand ε tend vers 0, avec l'espoir d'avoir un comportement agréable de la solution à la limite. On se retrouve donc à analyser des intégrales *fortement oscillantes* :

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\frac{\lambda x}{\varepsilon}} f(x)\mathrm{d}x.$$

On va donc prouver que cette intégrale a un développement asymptotique sympathique quand ε tend vers 0, mais juste en dimension 1.

Théorème 1.19 (Méthode de la phase stationnaire)**.** Soient $a < b$ deux réels et soient $\varphi, f \in \mathscr{C}^\infty([a,b],\mathbb{R})$. S'il existe $t_0 \in (a,b)$ tel que $\varphi'(t_0) = 0$ et $\varphi''(t_0) \neq 0$, alors, en notant $\sigma = \mathrm{sgn}(\varphi''(t_0))$, on a :

$$\int_a^b e^{ix\varphi(t)} f(t)\mathrm{d}t = e^{ix\varphi(t_0)} f(t_0)\sqrt{\frac{2\pi}{x\,|\varphi''(t_0)|}}e^{\sigma i\frac{\pi}{4}} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Démonstration. **Étape 1 : Application de Taylor à la fonction φ en t_0**
Étant donné que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,b]$ et que $\varphi'(t_0) = 0$, il existe $\rho \in \mathscr{C}^\infty([a,b],\mathbb{R})$ tel que $\rho(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$ et :

$$\forall t \in [a,b], \quad \varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{1}{2}\varphi''(t_0)(t-t_0)^2(1+\rho(t)),$$

de sorte que si ψ désigne la fonction :

$$\psi : t \mapsto \sqrt{\frac{|\varphi''(t_0)|}{2}}(t-t_0)\sqrt{1+\rho(t)},$$

alors ψ est bien défini et est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un petit voisinage $(t_0-\eta, t_0+\eta)$ de t_0 étant donné que $\rho(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$ et :

$$\psi'(t_0) = \sqrt{\frac{|\varphi''(t_0)|}{2}} > 0$$

et donc ψ définira un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme d'un petit voisinage $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ sur un intervalle (β_-, β_+) contenant $0 = \psi(t_0)$, et le jacobien de ce changement de variable sera positif. Ainsi, en découpant l'intégrale ainsi :

$$\int_a^b e^{ix\varphi(t)} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{t_0-\delta} e^{ix\varphi(t)} f(t)\mathrm{d}t + \int_{t_0+\delta}^b e^{ix\varphi(t)} f(t)\mathrm{d}t + e^{ix\varphi(t_0)}\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} e^{ix\sigma\psi(t)^2} f(t)\mathrm{d}t,$$

on peut appliquer le changement de variable $y = \psi(t)$ dans la dernière intégrale :

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} e^{ix\sigma\psi(t)^2} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\beta_-}^{\beta_+} e^{i\sigma xy^2}\frac{f\left(\psi^{-1}(y)\right)}{\psi'\left(\psi^{-1}(y)\right)}\mathrm{d}y.$$

Étant donné que φ' ne s'annule qu'en t_0, on peut analyser les deux premières intégrales avec le fait suivant :

Étape 2 : La phase non-stationnaire
Plaçons-nous dans le cas où $c < d$ sont deux réels et $\varphi, f \in \mathscr{C}^\infty([c,d],\mathbb{R})$, où φ' ne s'annule pas sur $[c,d]$. On a

alors :

$$\int_c^d e^{ix\varphi(t)} f(t)\mathrm{d}t = \int_c^d \underbrace{e^{ix\varphi(t)}\varphi'(t)}_{u'} \underbrace{\frac{f(t)}{\varphi'(t)}}_{v} \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{ix} e^{ix\varphi(t)} \frac{f(t)}{\varphi'(t)}\right]_c^d - \frac{1}{ix}\int_c^d e^{ix\varphi(t)} \left(\frac{f}{\varphi'}\right)'(t)\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi, les deux premières intégrales sont de l'ordre de $\frac{1}{x}$ et on verra que ce sera négligeable par rapport au troisième terme.

Étape 3 : La phase quadratique

Posons alors :

$$\begin{array}{rcccl} g & : & (\beta_-, \beta_+) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & y & \longmapsto & \dfrac{f\left(\psi^{-1}(y)\right)}{\psi'\left(\psi^{-1}(y)\right)}. \end{array}$$

Puisque ψ réalise un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme, on a que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Ainsi, il existe $h \in \mathscr{C}^\infty\left((\beta_-, \beta_+), \mathbb{R}\right)$ tel que :

$$\forall y \in (\beta_-, \beta+), \quad g(y) = g(0) + yh(y).$$

Ainsi, on a :

$$\int_{\beta_-}^{\beta_+} e^{i\sigma xy^2} \frac{f\left(\psi^{-1}(y)\right)}{\psi'\left(\psi^{-1}(y)\right)}\mathrm{d}y = g(0)\int_{\beta_-}^{\beta_+} e^{i\sigma xy^2}\mathrm{d}y + \int_{\beta_-}^{\beta_+} ye^{i\sigma xy^2} h(y)\mathrm{d}y.$$

— Première intégrale :

$$\int_{\beta_-}^{\beta_+} e^{i\sigma xy^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma xy^2}\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{\beta_-} e^{i\sigma xy^2}\mathrm{d}y - \int_{\beta_+}^{+\infty} e^{i\sigma xy^2}\mathrm{d}y.$$

La première intégrale est une intégrale de Fresnel :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma xy^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{x}} e^{i\sigma\frac{\pi}{4}}.$$

Les deux autres sont des $O\left(\frac{1}{x}\right)$. En effet, prenons la deuxième intégrale :

$$\int_{-\infty}^{\beta_-} e^{i\sigma xy^2}\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\beta_-} ye^{i\sigma xy^2}\frac{1}{y}\mathrm{d}y = \underbrace{\left[\frac{1}{2i\sigma xy} e^{i\sigma xy^2}\right]_{-\infty}^{\beta_-}}_{=\frac{1}{2i\sigma x\beta_-}e^{i\sigma x\beta_-^2}} + \frac{1}{2i\sigma x}\underbrace{\int_{-\infty}^{\beta_-} e^{i\sigma xy^2}\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y}_{\text{borné en } x \text{ par } \frac{-1}{\beta_-}} = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x}\right).$$

— Deuxième intégrale :

$$\int_{\beta_-}^{\beta_+} ye^{i\sigma xy^2} h(y)\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{2i\sigma x}h(y)\right]_{\beta_-}^{\beta_+} - \frac{1}{2i\sigma x}\int_{\beta_-}^{\beta_+} e^{i\sigma xy^2} h'(y)\mathrm{d}y.$$

Pour l'instant on ne peut pas vraiment conclure, car h est seulement supposée de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle *ouvert* (β_-, β_+). Cependant, si δ est assez petit, de sorte que ψ définisse un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme partant de, disons, $(t_0 - 2\delta, t_0 + 2\delta)$, et arrivant dans $(B_-, B_+) \supset (\beta_-, \beta_+)$, alors on a que h est la restriction à (β_-, β_+) d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur (B_-, B_+) et donc h et ses dérivées seront donc bien définies sur le compact $[\beta_-, \beta_+]$ et donc bornées ! Cela permet donc de dire :

$$\int_{\beta_-}^{\beta_+} ye^{i\sigma xy^2} h(y)\mathrm{d}y = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Mis tout ensemble, cela donne :

$$\int_{\beta_-}^{\beta_+} e^{i\sigma x y^2} \frac{f\left(\psi^{-1}(y)\right)}{\psi'\left(\psi^{-1}(y)\right)} \mathrm{d}y = g(0)\sqrt{\frac{\pi}{x}} e^{i\sigma\frac{\pi}{4}} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x}\right) = f(t_0)\sqrt{\frac{2\pi}{x\left|\varphi''(t_0)\right|}} e^{i\sigma\frac{\pi}{4}} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x}\right).$$

<u>Conclusion :</u>

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{ix\varphi(t)} f(t)\mathrm{d}t &= \int_a^{t_0-\delta} e^{ix\varphi(t)} f(t)\mathrm{d}t + \int_{t_0+\delta}^{b} e^{ix\varphi(t)} f(t)\mathrm{d}t + e^{ix\varphi(t_0)} \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} e^{ix\sigma\psi(t)^2} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x}\right) + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x}\right) + e^{ix\varphi(t_0)} f(t_0)\sqrt{\frac{2\pi}{x\left|\varphi''(t_0)\right|}} e^{i\sigma\frac{\pi}{4}} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= e^{ix\varphi(t_0)} f(t_0)\sqrt{\frac{2\pi}{x\left|\varphi''(t_0)\right|}} e^{i\sigma\frac{\pi}{4}} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Cela termine ce développement calculatoire mais, je trouve, très satisfaisant ! $\square$